

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ПРОЧНОСТИ

Белорусский национальный технический университет  
Минск, Беларусь

Анализ известных критериев прочности, учитывающих неодинаковую сопротивляемость материалов при растяжении и сжатии, выявил ряд существенных недостатков этих критериев, основным из которых является ограничение области их применения [1].

Предлагаемый новый энергетический критерий прочности является более общим и охватывает почти все известные энергетические критерии. Он основан на предположении, что энергия предельного напряжённого состояния является функцией величин нормального и касательного октаэдрических напряжений. При выводе гипотез прочности исследователи предполагают, что прочность материала зависит от напряжённого состояния, а условия прочности в общем виде могут быть представлены [1]:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, m_i) = A. \quad (1)$$

Константы материала  $m_i$  определяются по результатам испытаний при простейших нагружениях путём совместного решения системы уравнений (1). Для большинства гипотез число определяемых констант не превышает трёх. Поэтому они определяются из испытаний при кручении и одноосном растяжении и сжатии.

Предлагаемый критерий представляет собой частный случай зависимости (1) и имеет вид:

$$BV + (1 + B_1 \text{sign} V) \cdot U = C, \quad (2)$$

где  $V = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$  – величина, пропорциональная первому инварианту тензора напряжений  $U = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$  – величина, пропорциональная второму инварианту тензора напряжений

$B$ ,  $B_1$  и  $C$  – постоянные, величины, которых определяются на основании результатов экспериментов при кручении, одноосном растяжении и сжатии.

В выражении (2)  $\text{sign} V$  означает, что знак перед постоянной  $B_1$ , соответствует знаку величины  $V$ . Знак перед постоянной  $B_1$  определяет неравноценность предела прочности на сдвиг материала в области сжатия и в области растяжения.

При линейном растяжении

$$V = \sigma_{\text{вр}}; U = 2\sigma_{\text{вр}}^2. \quad (3)$$

$\sigma_{\text{вр}}$  – предел прочности материала при одноосном растяжении.

Следовательно, критерий (2) с учётом условий (3) может быть представлен в виде:

$$B\sigma_{\text{вр}} + 2(1 + B_1)\sigma_{\text{вр}}^2 = C \quad (4)$$

$$V = -\sigma_{\text{сж}}; U = 2\sigma_{\text{сж}}^2 \quad (5)$$

$\sigma_{\text{сж}}$  – предел прочности материала при одноосном сжатии.

Критерий (2) с учётом условий (5) будет иметь следующий вид:

$$-B\sigma_{\text{с}} + 2(1 - B_1)\sigma_{\text{с}}^2 = C. \quad (6)$$

При чистом сдвиге, определяемом при испытании материалов на кручение:

$$V = 0; U = 6\tau_{\text{с}}^2, \quad (7)$$

$\tau_{\text{с}}$  – предел прочности при сдвиге.

С учётом условий (7) критерий (2) может быть представлен в следующем виде:

$$6(1 \pm B_1)\tau_{\text{с}}^2 = C. \quad (8)$$

В выражении (8) постоянная  $B_1$  может иметь знак как плюс так и минус, что связано с нулевым значением величины  $V$ , относительно которой выбирается знак перед постоянной  $B_1$ .

В первом случае выражение (8) будем рассматривать с положительным значением постоянной  $B_1$ .

Поэтому, рассматривая совместно выражение (4), (6) и (8) находим значение постоянных  $B$ ,  $B_1$ ,  $C$ .

$$B = \frac{4\sigma_{\text{с}}^2(3\nu_{\tau}\tau_{\text{с}} - \sigma_{\text{ср}})}{3\tau_{\text{с}}^2(1 + \frac{1}{\nu}) + \sigma_{\text{с}}^2 - \sigma_{\text{ср}}\sigma_{\text{с}}};$$

$$B_1 = \frac{\sigma_{\text{с}}^2 + \sigma_{\text{ср}}\sigma_{\text{с}} - 3\tau_{\text{с}}^2(1 + \frac{1}{\nu})}{3\tau_{\text{с}}^2(1 + \frac{1}{\nu}) + \sigma_{\text{с}}^2 - \sigma_{\text{ср}}\tau_{\text{с}}};$$

$$C = \frac{12\sigma_{\text{с}}^2\tau_{\text{с}}^2}{3\tau_{\text{с}}^2(1 + \frac{1}{\nu}) + \sigma_{\text{с}}^2 - \sigma_{\text{ср}}\tau_{\text{с}}},$$

$$\text{где } \nu = \frac{\sigma_{\text{ср}}}{\sigma_{\text{с}}}; \quad \nu_{\tau} = \frac{\tau_{\text{с}}}{\sigma_{\text{ср}}};$$

Подставив значения постоянных  $B$ ,  $B_1$  и  $C$  в критерий (2) получим:

$$2\sigma_{\text{с}}^2(3\nu_{\tau}\tau_{\text{с}} - \sigma_{\text{ср}})V + \sigma_{\text{с}}^2U = 6\sigma_{\text{ср}}^2\tau_{\text{с}}^2. \quad (9)$$

Сравнение напряжённых состояний проводят с напряжённым состоянием данного материала легко осуществимого в экспериментальных условиях. Это напряжённое состояние называется эквивалентным. В качестве эквивалентного напряжения выбирают напряжение при одноосном растяжении. Рассматривая совместно выражения (4), (6) и (8) и принимая, что  $\sigma_{\text{ср}} = \sigma_{\text{экв}}$  получим следующую формулу эквивалентности:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{3\nu_{\tau}^2 - 1}{6\nu_{\tau}^2}V + \sqrt{\left(\frac{3\nu_{\tau}^2 - 1}{6\nu_{\tau}^2}\right)^2 V^2 + \frac{1}{6\nu_{\tau}^2}U} \quad (10)$$

Рассмотрим случай, когда в выражение (8) величина  $B_1$  входит с отрицательным знаком

Рассматривая аналогично выражение (4), (6) и (8) и принимая, что  $\sigma_{вр} = \sigma_{экв}$  получим следующую формулу эквивалентности:

$$\sigma_{экв} = \frac{1 - 3\nu^2\nu_\tau^2}{6\nu\nu_\tau^2}V + \sqrt{\left(\frac{1 - 3\nu^2\nu_\tau^2}{6\nu\nu_\tau^2}\right)^2 V^2 + \frac{1}{6\nu_\tau^2}U}. \quad (11)$$

Формула эквивалентности (10) справедлива в случае, если величина  $V$  положительна, а выражение (11) справедливо, если величина  $V$  отрицательна.

Анализируя формулы эквивалентности (10) и (11) нетрудно заметить, что для пластич-

ных материалов  $\nu=1$ ,  $\nu_\tau = \frac{1}{\sqrt{3}}$  они приводятся к формуле эквивалентности Губера-Мизиса-

Генки /2/, которая широко используется в инженерных расчётах на прочность. Дальнейший анализ показывает, что если между величинами  $\nu$  и  $\nu_\tau$  существует соотношение равное

$\nu_\tau = \frac{1}{\sqrt{3\nu}}$ , то обе формулы эквивалентности будут соответствовать формуле эквивалентности

П.П. Баландина /3/. Поэтому как критерий П.П. Баландина, так и критерий Губера-Мизиса-Генки являются частными случаями предложенного критерия прочности.

Предложенный энергетический критерий прочности представляет собой функцию напряжений и не зависит от деформаций. Для хрупких материалов он является условием прочности, а для пластичных материалов – условием пластичности. Расчёты с использованием данного критерия хорошо согласуются с результатами эксперимента.

В пространстве предложенный критерий представляет собой предельную поверхность в виде двух пересекающихся между собой параболоидов вращения, сопряжённых между собой в окрестности зоны, в которой октаэдрические касательные напряжения равны нулю. Параболоид вращения закрыт со стороны области растяжения и открыт со стороны области сжатия.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев, А.А. Расчёты на прочность при сложном напряжённом состоянии. Киев – 1968г. – 65с. 2. С.Д. Пономарёв, В.Л. Бидерман, К.И. Лихарев и др. Расчёты на прочность в машиностроении. – М.: Машгиз. – 1956г. – т.1 – 476с. 3. Г.С. Писаренко, В.А. Агарёв, А.Л. Квитка и др. Сопротивление материалов. – Киев – Техника – 1967г. – 790с.